



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Felipe Kaminsky Riffel

**Reconstrução simultânea da condutividade e permissividade  
elétrica na Tomografia por Impedância Elétrica**

Florianópolis

2024

Felipe Kaminsky Riffel

**Reconstrução simultânea da condutividade e  
permissividade elétrica na Tomografia por  
Impedância Elétrica**

Relatório final para Iniciação Científica  
Voluntária - Centro de Ciências Físicas e  
Matemáticas da Universidade Federal de Santa  
Catarina, para a obtenção do título de Licenci-  
ado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Júnior Margotti

Universidade Federal de Santa Catarina

Centro de Ciências Físicas e Matemática

Departamento de Matemática

Licenciatura em Matemática

Orientador: Dr. Fábio Júnior Margotti

Florianópolis

2024

# Resumo

A Tomografia por Impedância Elétrica (TIE) é uma técnica utilizada para reconstruir imagens da condutividade elétrica (ou da permissividade elétrica, ou ambas) no interior de um objeto a partir de experimentos realizados em sua superfície. O procedimento mais comum consiste em fixar eletrodos na superfície do objeto em estudo, aplicar correntes elétricas e, posteriormente, medir a diferença de potencial resultante entre cada um desses eletrodos em relação a um referencial (terra). Esse experimento é repetido diversas vezes com diferentes configurações de correntes elétricas, e utilizando-se as medições correspondentes, tenta-se determinar a condutividade/permissividade elétrica no interior do objeto. Recentemente, um equipamento para a aplicação de correntes elétricas e posterior medição dos potenciais resultantes foi construído por uma equipe que inclui os membros deste trabalho. Atualmente, o orientador deste trabalho coordena uma equipe que aperfeiçoará o protótipo citado para permitir a reconstrução simultânea de imagens da condutividade e da permissividade elétrica de objetos (CNPq-Grant 406206/2021-0). Para esse fim, serão necessárias modificações no hardware e software do protótipo em questão. O seguinte trabalho tem o objetivo de estudar aprimoramentos para o algoritmo de reconstrução de imagens já existente a fim de permitir a reconstrução de funções com imagem no conjunto dos números complexos, o que corresponde à reconstrução simultânea de imagens da condutividade e permissividade elétrica. Para esse fim, é feita uma revisão bibliográfica do modelo matemático usado para descrever a TIE, além de uma revisão básica de análise funcional, álgebra linear e Método de Elementos Finitos. Em seguida, são executados experimentos numéricos com implementações dos métodos estudados com as novas ferramentas. Os resultados obtidos mostram que os métodos geram soluções satisfatórias para estimação dos potenciais, sendo promissores para uso em trabalhos futuros na reconstrução de imagens de condutividade e permissividade.

**Palavras-chave:** Problemas Inversos; Tomografia por Impedância Elétrica

# Sumário

	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>5</b>
<b>1</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> . . . . .	<b>7</b>
1.1	Tomografia por Impedância Elétrica . . . . .	7
1.2	Implementação Computacional . . . . .	9
1.3	Resolução do Problema Inverso . . . . .	13
<b>2</b>	<b>MATERIAIS E MÉTODOS</b> . . . . .	<b>16</b>
<b>3</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b> . . . . .	<b>17</b>
3.1	Implementação computacional do problema direto . . . . .	17
3.2	Conclusões . . . . .	23
3.2.1	Avaliação do aluno em relação aos benefícios da IC no seu aprendizado e formação científica. . . . .	23
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>25</b>

# Introdução

A Tomografia por Impedância Elétrica (TIE) é uma técnica empregada na reconstrução de imagens da condutividade elétrica, ou permissividade elétrica - ou ambas - no interior de um objeto por meio de experimentos realizados em sua superfície. O procedimento padrão envolve a fixação de eletrodos na superfície do objeto em estudo, a aplicação de correntes elétricas e a medição da diferença de potencial resultante entre cada eletrodo em relação a um referencial (terra). Esses experimentos são repetidos com diversas configurações de correntes elétricas, e utilizando as medições correspondentes, busca-se determinar a condutividade e permissividade elétrica no interior do objeto (SOMERSALO; CHENEY; ISAACSON, 1992).

Esse procedimento possui uma grande variedade de aplicações e vantagens sobre outros métodos de tomografia. Como relatam Cheney, Isaacson e Newell (1999), uma das principais aplicações é para imagem médica, podendo ser vantajosa por não necessitar de exposição a materiais e fenômenos radioativos, como a usual tomografia por Raios-X. Outras aplicações citadas pelos autores são “a determinação de depósitos minerais no interior da terra, rastreamento da propagação de contaminantes na terra, avaliação não-destrutiva de componentes de máquina e controle de processos industriais” (CHENEY; ISAACSON; NEWELL, 1999).

Diversos são os trabalhos na área que trazem técnicas e implementações para a reconstrução de imagens via TIE com diferentes aplicações. Recentemente, vem se desenvolvendo um projeto de pesquisa na UFSC intitulado “Impedance Tomography for monitoring multiphase flows” (MARGOTTI, 2022), o qual originou esse trabalho. Nele, tem-se como objetivo desenvolver um sistema de Tomografia por Impedância Elétrica para o monitoramento do fluxo de fluidos multifásicos, aplicação especialmente interessante na exploração de petróleo. No atual estado da pesquisa, foi desenvolvido o protótipo de um equipamento capaz de aplicar as correntes elétricas e fazer as medições dos potenciais. Além disso, um algoritmo foi implementado para reconstrução das imagens de condutividade elétrica utilizando os dados medidos pelo protótipo.

Como Borcea (2002) explica, nos modelos da TIE utilizados são feitos cálculos a partir do inverso multiplicativo da impedância, a chamada admitividade elétrica, a qual se trata de uma grandeza complexa separada em uma parte real, chamada condutividade, e uma parte imaginária, chamada permissividade. Alguns modelos tratam apenas do caso em que se desconsidera a permissividade, trabalhando apenas com os valores reais correspondentes à condutividade. Todavia, fazer a reconstrução simultânea pode trazer uma precisão maior para as soluções, podendo resultar em reconstruções mais próximas

das imagens desejadas, sendo uma das metas do projeto de pesquisa citado anteriormente.

Nesse sentido, o seguinte trabalho teve como objetivo aprimorar o algoritmo de reconstrução de imagens para reconstruir simultaneamente a condutividade e permissividade elétricas na TIE, a qual é performada com funções tendo imagens nos números complexos. Para isso, realizou-se uma revisão bibliográfica do modelo matemático utilizado para descrever a TIE, juntamente com uma revisão básica de análise funcional e álgebra linear. Ao final, foram implementados novos algoritmos para resolução do problema e testes foram conduzidos para avaliar seu desempenho.

# 1 Revisão Bibliográfica

## 1.1 Tomografia por Impedância Elétrica

A Tomografia por Impedância Elétrica (ou Electrical Impedance Tomography - EIT), tal como explicam Somersalo, Cheney e Isaacson (1992), Kirsch (2011) e Borcea (2002), consiste no seguinte problema: algumas correntes são aplicadas na superfície de um corpo, e, a partir dos potenciais elétricos resultantes medidos em sua superfície, tenta-se reconstruir uma imagem da sua impedância elétrica, através de sua admitividade ou condutividade elétrica.

Esse problema possui uma grande variedade de aplicações, como relatam Cheney, Isaacson e Newell (1999), que vão desde exame médico de imagem, análise de fluido multifásico, localização de minérios e materiais no interior da terra, controle de processos industriais, entre muitas outras. Devido a sua relevância, é um tema de grande interesse, amplamente estudado há algumas décadas, com diversos estudos buscando modelagens e soluções para o problema.

Dentre os principais modelos matemáticos que tentam descrever o problema da Tomografia Elétrica, neste trabalho tratamos do chamado Modelo Contínuo. No contexto deste trabalho, consideramos o caso da Tomografia respectiva a uma seção transversal do corpo. Assim, consideramos o domínio como um conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , tendo uma superfície consistindo na fronteira  $\partial\Omega$ . Esse corpo é dotado de uma admitividade, modelada como uma função com imagem complexa  $\gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Tal grandeza expressa como cada parcela do corpo é suscetível à passagem de corrente. Sendo uma grandeza complexa, pode ser separada em uma parte real e imaginária na forma  $\gamma = \sigma + \epsilon \cdot i$ , onde  $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\epsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  são chamadas respectivamente condutividade e permissividade elétricas.

Com um corpo eletricamente carregado, temos outras duas medidas: a corrente elétrica  $g$ , que consiste na taxa de cargas que atravessam cada ponto, e o potencial elétrico  $u$ , que consiste na energia potencial para cada quantidade de carga com relação a um referencial. Podemos modelar o potencial como uma função  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , representando o potencial elétrico em cada ponto de  $\Omega$ , e a corrente elétrica, uma função  $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{C}$  restrita à superfície, sendo ela o domínio de interesse para tal grandeza nesse modelo.

O Modelo Contínuo é composto basicamente de duas equações-base. A primeira, conforme mostra Borcea (2002), pode ser obtida a partir das leis do eletromagnetismo. Ela estabelece que:

$$\nabla \cdot (\gamma(x)\nabla u(x)) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1.1.1)$$

expressando que o fluxo elétrico não apresenta 'fontes' ou 'drenos', não sendo gerado nem se perdendo ao longo do corpo.

Outra das equações do Modelo Contínuo estabelece que a corrente  $g$  em cada ponto da superfície corresponde ao fluxo normal da corrente elétrica (o quanto de corrente está atravessando para fora do corpo) dando a relação:

$$\gamma(x) \frac{\partial u}{\partial \eta}(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (1.1.2)$$

onde  $\eta : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  é o campo vetorial normal unitário externo a  $\Omega$ , que representa o vetor normal  $\eta(x)$  a cada ponto  $x \in \partial\Omega$ .

Juntando as Equações (1.1.1) e (1.1.2), temos a formulação do Modelo Contínuo da Tomografia por Impedância Elétrica, que consiste em: aplicando uma corrente elétrica  $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{C}$  em um corpo de admitividade  $\gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , obter o potencial elétrico gerado  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  que satisfaça

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\gamma(x) \nabla u(x)) = 0, & x \in \Omega \\ \gamma(x) \frac{\partial u}{\partial \eta}(x) = g(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.1.3)$$

Conforme explicado por (SANTANA, 2022), dados  $\gamma$  e  $g$  nos espaços apropriados, o Modelo Contínuo admite uma solução  $u$ , sendo esta única adicionada a hipótese de que:

$$\int_{\partial\Omega} g \, ds = 0, \quad (1.1.4)$$

condição conhecida como Princípio da Conservação de Energia.

Com isso, para cada corrente  $g$  aplicada num corpo de admitividade  $\gamma$ , teremos um único potencial sobre a fronteira  $f = u|_{\partial\Omega}$  associado. Podemos traduzir isso, definindo para cada  $\gamma$  fixa o operador  $\Lambda_\gamma$ , chamado operador Neumann para Dirichlet (NtD), que associa cada corrente elétrica  $g$  ao potencial sobre a superfície  $f = \Lambda_\gamma g$  correspondente.

Como descreve Margotti (2015), é possível definir um operador  $F$  que associa cada  $\gamma$  a um operador NtD  $\Lambda_\gamma = F(\gamma)$  correspondente. Ou seja, cada admitividade define um comportamento específico na associação de correntes e potenciais. Define-se então o chamado problema direto do Modelo Contínuo como o processo de obter o operador  $\Lambda_\gamma$  a partir da condutividade  $\gamma$  conhecida. Isto é, queremos calcular

$$F(\gamma) = \Lambda_\gamma. \quad (1.1.5)$$

O problema inverso, por sua vez, consiste em obter  $\gamma$  a partir das informações de  $\Lambda_\gamma$ . Não são conhecidas formas diretas de resolver tal problema inverso, sendo necessárias estratégias como métodos de regularização.

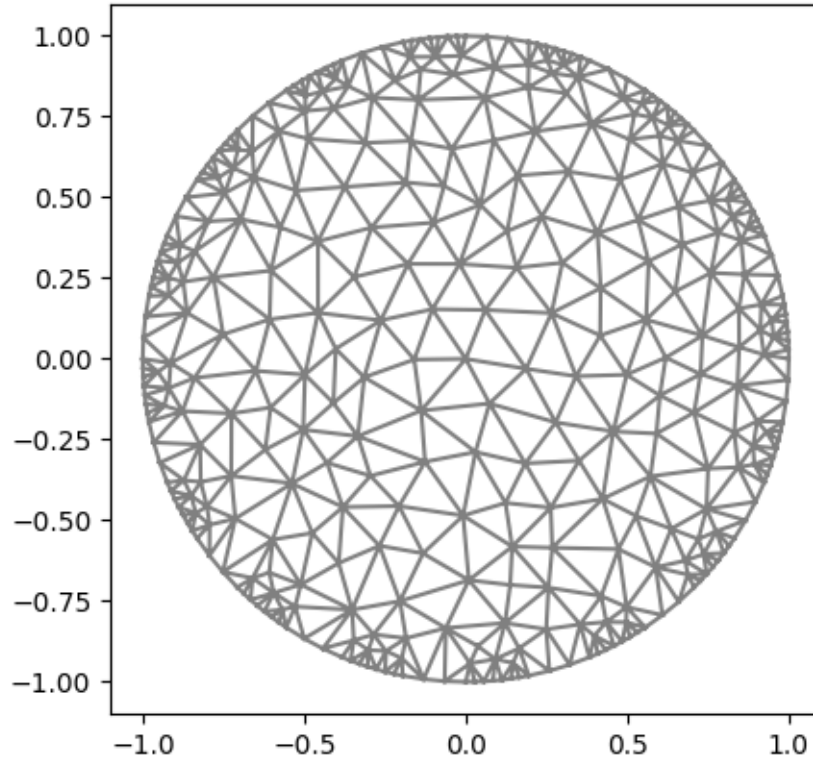


## 1.2 Implementação Computacional

Para resolução do problema inverso  $F(\gamma) = \Lambda_\gamma$ , é necessário primeiramente resolver o problema direto. Ou seja, precisamos calcular  $F(\gamma)$ . Apesar de sabermos que a equação diferencial (1.1.3) admite solução, não são conhecidas soluções explícitas para o problema em termos de séries ou funções elementares. Desse modo, utilizamos técnicas para resolução computacional do problema. Em particular, neste trabalho empregamos o Método dos Elementos Finitos (MEF),

Conforme explicam Galvis e Versieux (2011), o MEF se baseia em aproximar as funções do problema - pertencentes a espaços de dimensão infinita - utilizando funções em espaços de dimensão finita. Inicialmente, realizamos uma discretização do domínio  $\Omega$  a partir de uma triangulação. Isto é, particionamos  $\Omega$  em um conjunto finito de triângulos  $T_1, \dots, T_N$  cujos vértices de um triângulo não estão no interior das arestas de outro. A Figura 3.1.1 ilustra uma triangulação do domínio  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$  com um número de  $N = 594$  triângulos com  $K = 378$  vértices. Denominamos malha o conjunto discretizado.

Figura 1.2.1 – Exemplo de uma triangulação de  $\Omega$  com  $N = 594$  triângulos com  $K = 378$  vértices



Fonte: Elaborado pelo autor

Dada essa triangulação, utilizamos espaços funções de dimensão finita tomando por base a discretização empregada no domínio. Nesse contexto, utilizamos alguns espaços

particulares. O primeiro espaço trata-se do gerado por funções características em cada triângulo. Dado um triângulo  $T_i$ , definimos a função característica  $\chi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$\chi_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in T_i; \\ 0, & \text{se } x \notin T_i. \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Denotamos  $V_1 = \text{span}\{\chi_1, \dots, \chi_N\}$  o espaço gerado pelas funções características de cada triângulo da malha. No contexto da TIE, utilizamos as funções nesse espaço para aproximar as funções de admitividade  $\gamma$ . Isto é, consideramos as funções  $\gamma \in V_1$ , podendo escrevê-las na forma

$$\gamma = \gamma_1 \chi_1 + \dots + \gamma_N \chi_N, \quad (1.2.2)$$

sendo  $\gamma_1, \dots, \gamma_N \in \mathbb{C}$ .

O segundo espaço é composto pelas funções contínuas afins por partes. Isto é, que em cada triângulo definem um 'plano', um gráfico de função afim. A base utilizada para gerar tal espaço é construída da seguinte forma: consideramos  $P_1, \dots, P_K$  os vértices presentes na malha discretizada, e para cada vértice  $P_j$  definimos a função  $v_j : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  com a propriedade de

$$v_j(P_k) = \begin{cases} 1, & k = j; \\ 0, & k \neq j, \end{cases} \quad (1.2.3)$$

e sendo afim nos triângulos adjacentes a  $P_j$ . Denotamos  $V_2 = \text{span}\{v_1, \dots, v_j\}$  o espaço gerado por tais funções, correspondendo ao espaço de funções contínuas afins por partes.

Tais funções são utilizadas no contexto da TIE para aproximação das funções de potenciais  $u$ . Dessa maneira, supondo  $u \in V_2$  podemos escrevê-la na forma

$$u = u_1 v_1 + \dots + u_K v_K, \quad (1.2.4)$$

com  $u_1, \dots, u_K \in \mathbb{C}$ .

Por fim, utilizamos ainda o espaço das funções afins contínuas restritas à fronteira. Para tal, tomamos os vértices  $P_1, \dots, P_K$  numerados de forma a que os  $M$  primeiros correspondam aos que estão sobre a fronteira  $\partial\Omega$ . Consideramos para cada um destes a restrição  $w_j = v_j|_{\partial\Omega}$  e definimos  $V_3 = \text{span}\{w_1, \dots, w_M\}$ . Tal espaço é utilizado para aproximar as funções de corrente  $g$  e os potenciais medidos  $f = u|_{\partial\Omega}$ . De forma similar à apresentada nos demais espaços, podemos utilizar a expansão em coordenadas.

Dada a discretização empregada no domínio e nas funções, o próximo para o MEF é transformar o problema original em um sistema linear. Tal procedimento é feito inicialmente transformando a equação diferencial (1.1.3) em uma equação integral, chamada formulação variacional.

Com método análogo ao descrito em (SANTANA, 2022), dadas  $g$  e  $\gamma$ , uma solução  $u$  de (1.1.3) será também uma solução  $u$  para a equação

$$\iint_{\Omega} \gamma(x) \nabla u(x) \overline{\nabla v(x)} dx = \int_{\partial\Omega} g \bar{v} ds, \text{ para toda } v \text{ suave t.q. } \int_{\partial\Omega} \bar{v} ds = 0, \quad (1.2.5)$$

com  $u$  e  $v$  nos espaços de funções apropriados, chamada formulação fraca do problema. Aqui,  $\bar{v}$  indica o conjugado complexo de  $v$ .

Apesar desta equação admitir soluções que não são suportadas no modelo (1.1.3), para funções regulares o suficiente, os dois problemas se tornam equivalentes. Além disso, como explica Santana (2022), para  $g, \gamma$  fixadas nos conjuntos de funções adequados, a Equação (1.2.5) admite solução única adicionada as hipóteses

$$\int_{\partial\Omega} g dS = 0, \quad (1.2.6)$$

hipótese conhecida como Princípio de Conservação de Energia, e

$$\int_{\partial\Omega} u dS = 0, \quad (1.2.7)$$

que corresponde ao aterramento do potencial. Tais restrições devem ser entendida no sentido do Teorema do Traço, com mais detalhes em (MARGOTTI, 2015).

É possível verificar que as funções nos espaços  $V_1, V_2, V_3$  são suficientemente regulares para a formulação (1.2.5). Com isso, com procedimento similar ao apresentado por Santana (2022), dadas as funções  $\gamma \in V_1, v, u \in V_2, g \in V_3$  expandidas na forma  $\gamma = \sum_{i=1}^N \gamma_i \chi_i, u = \sum_{i=1}^K u_i v_i$  e  $g = \sum_{i=1}^M g_i w_i$ , a equação variacional (1.2.5) se torna um sistema da forma

$$A\hat{u} = b, \quad (1.2.8)$$

onde

$$A_{i,j} = \sum_{k=1}^N \gamma_k \int_{T_k} \nabla v_i \overline{\nabla v_j} \quad (1.2.9)$$

e

$$b_i = \sum_{k=1}^M g_k \int_{\partial\Omega} w_j \bar{w}_i dS. \quad (1.2.10)$$

Aqui,  $\hat{u} = (u_1, \dots, u_K) \in \mathbb{C}^K$  corresponde ao vetor de coordenadas na expansão de  $u \in V_2$ . Desse modo, conhecendo as funções  $\gamma, g$  e as respectivas coordenadas na expansão em  $V_1$  e  $V_3$ , podemos obter as coordenadas de  $u$  através da solução de um sistema linear.

Tal sistema, como descreve Santana (2022), apresenta um número infinito de soluções, todas diferindo apenas de uma constante  $c \in \mathbb{C}$ . Como queremos uma solução tal que  $\int_{\partial\Omega} u dS = 0$ , dada uma solução  $\hat{u} \in \mathbb{C}^K$  de (1.2.8) e a respectiva função  $w = \sum w_k v_k$ ,

obtemos a solução  $u$  procurada por:

$$u = w - \frac{1}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} w \, dS. \quad (1.2.11)$$

Obtida tal solução, podemos obter o potencial medido respectivo  $f = u|_{\partial\Omega}$  tomando sua expansão em  $V_3$ . Isto é,  $f = \sum_{k=1}^M f_k w_k$ , onde  $f_k = u_k$  para cada  $1 \leq k \leq M$  e  $u = \sum_{i=1}^K u_i v_i$ .

Além de calcular o potencial, é possível ainda calcular a derivada do operador  $F$  em uma determinada direção, procedimento necessário em alguns métodos para resolução numérica do problema  $F(\gamma) = \lambda_\gamma$ . Como discute Margotti (2015),  $F$  é um operador diferenciável. Apesar de não conhecermos forma direta de calcular essa derivada numa direção arbitrária dado um ponto qualquer, podemos nos beneficiar da discretização utilizada para calculá-la de forma aproximada.

Inicialmente, no método usual para resolver o problema não utilizamos uma única medição de potencial  $f$ , mas sim um conjunto de potenciais  $f_1, \dots, f_l$  para um certo conjunto de correntes  $g_1, \dots, g_l$  aplicadas. Assim, nosso interesse será de calcular a derivada respectiva a todos os potenciais e correntes agrupadas.

O agrupamento de potenciais e correntes é exercido por um operador auxiliar. Fixada uma corrente  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , é possível definir o operador  $F_g$  dado por

$$F_g(\gamma) = F(\gamma)g = \Lambda_\gamma g. \quad (1.2.12)$$

que associa cada  $\gamma$  ao potencial resultante dada a corrente fixada. Assim, fixado  $G = \{g^1, \dots, g^l\}$  um conjunto de correntes, podemos definir um operador  $F_G$  dado por

$$F_G(\gamma) = \begin{bmatrix} F_1(\gamma) \\ \vdots \\ F_l(\gamma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_l \end{bmatrix} \quad (1.2.13)$$

onde  $F_i(\gamma) = \Lambda_\gamma(g_i)$  para cada  $i \in \{1, \dots, l\}$ .

Conforme descrito por Santana (2022), dada uma função  $\eta$  num espaço apropriado, para uma corrente  $g^k$  a derivada  $F'_k(\gamma)\eta$  de  $F_k$  em  $\gamma$  na direção  $\eta$  é dada por

$$F'_k(\gamma)\eta = \omega^{(k)}|_{\partial\Omega}, \quad (1.2.14)$$

onde  $\omega^{(k)}$  é solução do problema variacional

$$\iint_{\Omega} \gamma(x) \nabla \omega^k(x) \overline{\nabla v(x)} \, dx = - \int_{\Omega} \eta(x) \nabla u_\gamma^k(x) \overline{\nabla v(x)} \, dx, \text{ para toda } v \text{ suave t.q. } \int_{\partial\Omega} \bar{v} \, ds = 0, \quad (1.2.15)$$

dada  $u_\gamma^k$  solução de (1.2.5) para  $\gamma$  e  $g_k$  estabelecidas. Note que, aplicando um procedimento similar com uso das discretizações, é possível transformá-la em um sistema da forma

$Ax = y$ , onde  $A$  é a mesma indicada em (1.2.9) e  $y$  é obtido utilizando a discretização de  $\eta$  (SANTANA, 2022)

Dadas as correntes fixadas, a derivada de  $F_G$  em  $\gamma$  na direção  $\eta$  é dada por

$$F'_G(\gamma)\eta = \begin{pmatrix} \omega^{(1)}|_{\partial\Omega} \\ \vdots \\ \omega^{(l)}|_{\partial\Omega} \end{pmatrix} \quad (1.2.16)$$

Isto é, para cada corrente  $g^k$  fixada, resolvemos (1.2.5) dada  $\gamma$  em questão, obtendo  $u_\gamma^k$ . Em seguida, resolvemos a equação variacional (1.2.15) utilizando a direção  $\eta$  estabelecida. Obtemos então um vetor das coordenadas de  $\omega^k$  em  $V^2$ , dos quais restringimos à fronteira tomando apenas as coordenadas necessárias, obtendo o vetor com as coordenadas de  $\omega^k|_{\partial\Omega}$  em  $V_3$ . Ao final, empilhamos tais vetores em sequência para obter a derivada  $F'_G(\gamma)\eta$ .

Utilizando esse método, Santana (2022) mostra ainda que é possível calcular uma Jacobiana de  $F_j(\gamma) \in \mathbb{C}^{l \times N}$  no caso discretizado para uma  $\gamma$  qualquer, a qual é dada por

$$F'_j(\gamma) = \begin{pmatrix} F'_1(\gamma)\chi_{T_1} & \cdots & F'_1(\gamma)\chi_{T_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F'_l(\gamma)\chi_{T_1} & \cdots & F'_l(\gamma)\chi_{T_N} \end{pmatrix}, \quad (1.2.17)$$

sendo  $\chi_{T_j}$  a função característica em cada triângulo  $T_j$ .

### 1.3 Resolução do Problema Inverso

Na modelagem apresentada anteriormente, o problema inverso é definido como  $F(\gamma) = \Lambda_\gamma$ . Isto é, queremos obter  $\gamma$  conhecendo informações do operador NtD  $\Lambda_\gamma$ , o qual associa cada corrente ao potencial resultante na superfície. Os métodos apresentados na seção anterior são interessantes para calcular o operador NtD. Isto é, para uma dada  $g$  e  $\gamma$  conhecidas, conseguimos calcular  $f = \Lambda_\gamma g$ .

Ocorre que, estando originalmente  $f, g$  em espaços de dimensão infinita, não é possível obter informações completas desse operador  $\Lambda_\gamma$ . Apesar de sabermos calcular  $f = \Lambda_\gamma g$  conhecendo  $\gamma$  e  $g$ , não podemos garantir que uma determinada  $\gamma$  é a única responsável por gerar um conjunto de finito de potenciais  $f$  a partir de um conjunto finito de correntes  $g$ .

Ainda assim, podemos tentar trabalhar de forma aproximada. Para isso, conforme explicado por Margotti (2015), para uma dada  $\gamma$  aplicamos um conjunto  $G = \{g^1, \dots, g^l\}$  de correntes pré-estabelecidas e medimos os potenciais respectivos  $f_1, \dots, f_l$  sobre a fron-

teira. Desse modo, teremos medido

$$F_G(\gamma) = \begin{bmatrix} \Lambda_\gamma g^1 \\ \vdots \\ \Lambda_\gamma g^l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_l \end{bmatrix}. \quad (1.3.1)$$

O problema inverso  $F_G(\gamma) = (f_1, \dots, f_l)^T$  será o problema auxiliar que tentaremos resolver.

De forma geral, um problema inverso matematicamente consiste em: conhecendo um certo  $y \in Y$ , deseja-se obter  $x^\dagger \in X$  tal que  $F(x^\dagger) = y$ . Na prática, não conhecemos o vetor  $y \in \mathcal{R}(F)$  exato gerado pelo operador, mas sim uma versão ruidosa  $y^\delta \in Y$ , tendo uma distância ao vetor  $y$  limitada por um nível de ruído  $\delta > 0$ . Essa característica torna necessária a determinação de soluções aproximadas, levando em conta os ruídos das medições.

Ocorre que muitos problemas são instáveis, característica na qual as aproximações obtidas com métodos convencionais podem ser muito distantes da solução real procurada. Em particular, o problema da TIE trata-se de um problema fortemente instável, como comenta Margotti (2015). Nesse sentido, são necessários métodos que contornem tanto o ruído como a instabilidade do problema, sendo particularmente usados os chamados métodos de regularização.

Um método de regularização consiste em um procedimento que conceda soluções aproximadas  $x^\delta \in X$  para o problema inverso de forma que  $x^\delta \rightarrow x^\dagger$ , à medida que  $\delta \rightarrow 0$ . Alguns dos Métodos de Regularização mais tradicionais explorados e utilizados são o Método de Tikhonov e o Método do Gradiente.

O Método de Tikhonov tradicional tem como estratégia dar como solução aproximada  $x^\delta$  um elemento que forneça valor mínimo do funcional  $T_\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$T_\alpha(x) = \frac{1}{2} \|F(x) - y^\delta\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|x\|^2, \quad (1.3.2)$$

sendo  $\alpha > 0$  um chamado parâmetro de regularização. A ideia é que a distância do  $F(x)$  obtido ao  $y^\delta$  bem como a norma de  $x$  sejam tão pequenas quanto possível. Em alguns casos, o funcional  $T_\alpha$  é substituído por uma sequência de funcionais  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , similares ao definido em (1.3.2), mas parametrizados por sequências de parâmetros  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  apropriadas. A cada  $n$ -ésimo passo se obtém um minimizador  $x_n$  para  $T_n$  e utiliza-se como aproximação  $x^\delta$  o primeiro termo  $x_n$  que satisfaça um critério de parada adequado.

Um segundo método frequentemente utilizado é chamado Método do Gradiente, o qual busca minimizar o funcional  $G(x) = \frac{1}{2} \|F(x) - y^\delta\|^2$  através do método de otimização do gradiente. Nele, gera-se o método iterativo em que, a partir de um ponto inicial  $x_0 \in X$ , define-se iterativamente a sequência dada por

$$x_{n+1} = x_n - \lambda_k \nabla G(x_n), \quad (1.3.3)$$

sendo  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$  uma sequência dos chamados tamanhos de passo e  $\nabla G$  o gradiente ou derivada de  $G$ . Nesse método, a partir de cada  $x_n$  se anda em direção oposta ao gradiente nesse ponto, a qual fornece o maior decrescimento local do funcional  $G$  a cada passo. A aproximação  $x^\delta$  é fornecida nesse procedimento estabelecendo um critério de parada em termos do nível de ruídos e das características de  $F$ .

## 2 Materiais e Métodos

O seguinte trabalho tem aspecto técnico e quantitativo, buscando aprimorar ferramentas já existentes e avaliar o desempenho dos novos métodos utilizados. Seu desenvolvimento se deu por uma etapa de revisão bibliográfica, implementação dos códigos e experimentos numéricos para avaliação.

Para revisão bibliográfica, realizamos estudos e encontros entre orientandos e orientador para discussões dos tópicos relacionados. Em particular, efetuamos estudos em torno da Tomografia por Impedância Elétrica tendo como base principalmente os referenciais de (BORCEA, 2002), (SOMERSALO; CHENEY; ISAACSON, 1992), (CHENEY; ISAACSON; NEWELL, 1999), de Análise Funcional tendo como base o livro texto (KREYSZIG, 1991), tópicos de Método dos Elementos Finitos com base nas bibliografias de (MARGOTTI, 2015) e (LOGG et al., 2012).

Os códigos foram desenvolvidos em Python, uma linguagem de programação de código aberto que possui um forte apelo na indústria e na pesquisa acadêmica, e possui um grande leque de ferramentas para a computação científica (LASSER et al., 2021). Para auxílio nos cálculos do Método de Elementos Finitos, foi utilizada a biblioteca FEniCSx. Trata-se de uma versão atualizada do FEniCS, biblioteca para Python que traz diversos recursos com fácil usabilidade para resolução numérica de equações diferenciais, empregando especialmente as técnicas do Método de Elementos Finitos (LOGG et al., 2012). FEniCSx traz essencialmente as mesmas funcionalidades da sua versão original, porém agora com suporte para processamento paralelo, números complexos, bem como melhorias em geral nas técnicas disponíveis (DOKKEN, 2024).

A implementação e execução dos métodos foi realizada na ferramenta Google Colab, versão de 2023, que oferece um ambiente virtual de execução do Python na versão 3.10. Esse ambiente conta com um processador de dois núcleos AMD EPYC 7B12 de 2.2GHz e 512kb de memória *cache*, contendo ainda 13 GB de memória RAM. A avaliação será dada por medidas de desempenho, avaliando a partir de dados sintéticos gerados com funções e soluções previamente estabelecidas.



## 3 Resultados e Discussão

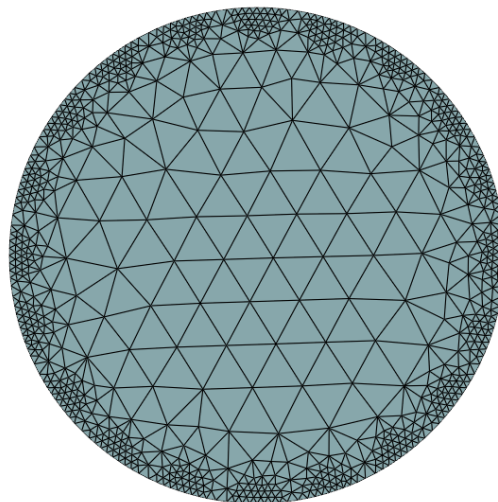
A seguir, descrevemos os resultados obtidos com as implementações. Os códigos estão disponíveis em repositório aberto <sup>1</sup>. As implementações desenvolvidas foram para cálculo do problema direto: isto é, calcular uma aproximação dos potenciais dadas as admitividades e correntes informadas.

### 3.1 Implementação computacional do problema direto

Nessa etapa, buscamos implementar os métodos necessários para cálculo do problema direto. Isto é, estabelecendo a admitividade  $\gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  e uma corrente  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , queremos calcular a distribuição de potencial  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  resultante e o respectivo potencial  $f = u|_{\partial\Omega}$  sobre a fronteira.

Para os testes desenvolvidos, estabelecemos o domínio  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ . Iniciamos realizando a discretização de  $\Omega$ , com o processo e refinamentos da malha sendo executados por ferramentas auxiliares do FEniCSx. A malha gerada pode ser observada na Figura 3.1.1, contendo  $N = 1572$  triângulos,  $K = 883$  vértices totais e  $M = 192$  vértices na fronteira.

Figura 3.1.1 – Triangulação de  $\Omega$  com  $N = 1572$  triângulos,  $K = 883$  vértices totais e  $M = 192$  vértices na fronteira



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para avaliação dos testes, estabelecemos funções de admitividade e corrente co-

<sup>1</sup> Disponível em <https://github.com/felipekriffel/EITx>

nhecidas, a fim de obter uma solução explícita conhecida. Desse modo, conseguimos comparar o erro absoluto da solução obtida computacionalmente com a solução real. A admitividade estabelecida é a função constante  $\gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$\gamma(x, y) = 1 + i, \forall (x, y) \in \Omega, \quad (3.1.1)$$

sendo  $i = \sqrt{-1}$  a unidade imaginária. A corrente elétrica  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  estabelecida para o teste é dada por

$$g(x, y) = 4y^2 - 4x^2, \quad (3.1.2)$$

a qual demonstra-se como o faz Santana (2022) que satisfaz  $\int_{\partial\Omega} g \, dS = 0$ .

Com as  $\gamma$  e  $g$  fixadas, pode-se verificar que a solução  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  para o problema (1.1.3) satisfazendo (1.2.7) é dada por

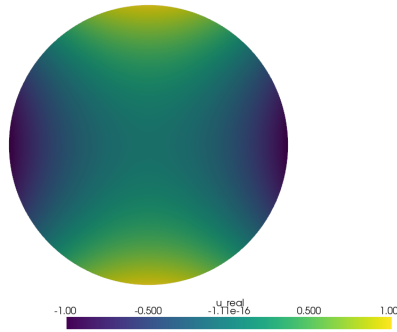
$$u(x, y) = (-1 + i)x^2 - (-1 + i)y^2. \quad (3.1.3)$$

A Figura 3.1.2 apresenta o gráfico da função  $u$  no domínio  $\Omega$ , com as devidas partes reais e imaginárias separadas.

Figura 3.1.2 – Gráfico de  $u(x, y) = (-1 + i)x^2 - (-1 + i)y^2$  em  $\Omega$ .

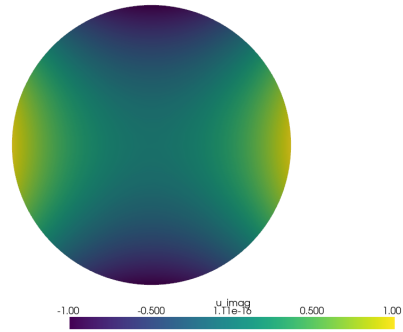
(a) Parte real.

U real solution



(b) Parte imaginária.

uh imaginary solution

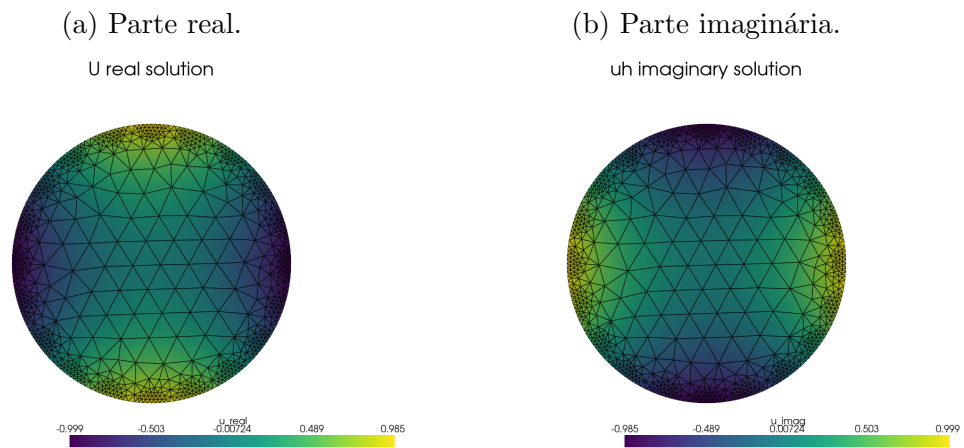


Fonte: Elaborado pelo autor.

As funções são aproximadas nos espaços  $V_1, V_2, V_3$  utilizando métodos de interpolação do FEniCSx, gerando objetos para gerenciar os vetores de coordenadas respectivos nos espaços apropriados. A ferramenta também é responsável por gerar as matrizes e vetores referentes aos problemas variacionais, bem como dispõe recursos para resolver os sistemas lineares necessários.

Aplicando os métodos citados obtemos uma solução numérica  $u_s$ , cujo gráfico pode ser observado na Figura 3.1.3. Notamos que visualmente o gráfico se assemelha com os da solução exata, a menos da discretização empregada tendo os triângulos destacados na solução numérica  $u_s$ .

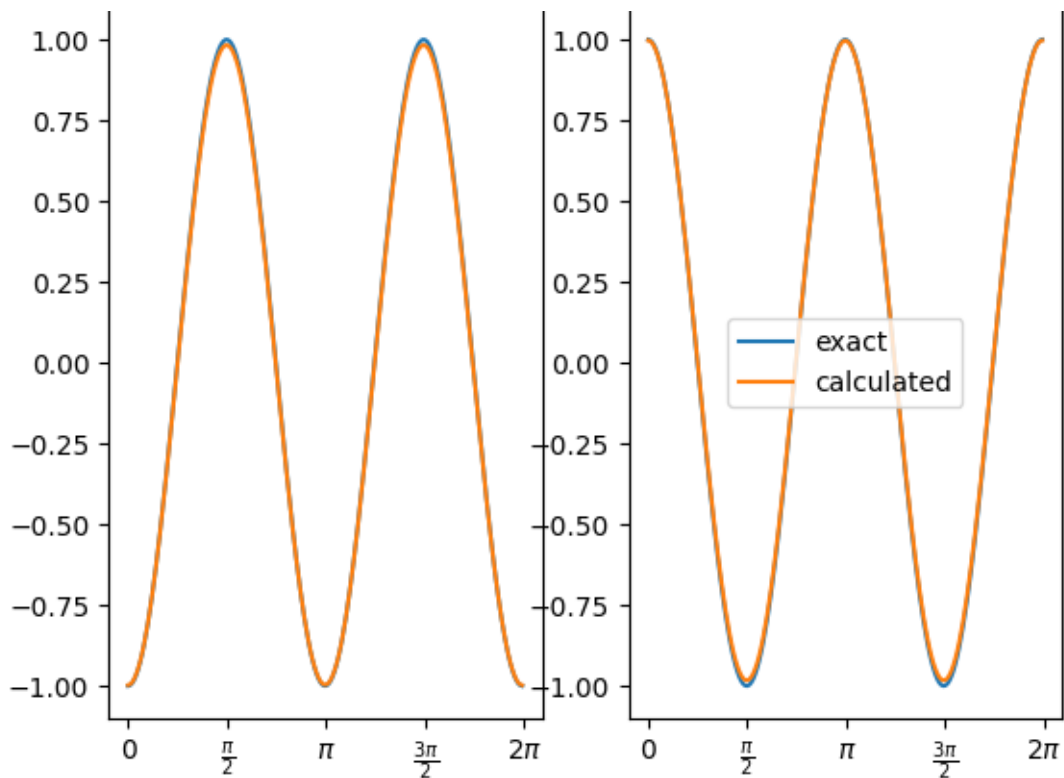
Figura 3.1.3 – Gráficos da função  $u_s(x, y)$  obtida através da implementação.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Figura 3.1.4 podemos observar o gráfico da solução numérica  $u_s$  com a solução exata  $u$  na fronteira linearizadas. Isto é, usando a parametrização  $\phi : [0, 2\pi] \rightarrow \partial\Omega$  da fronteira dada por  $\phi(t) = (\cos(t), \sin(t))$ , plotamos o gráfico de  $u(\phi(t))$  e  $u_s(\phi(t))$  em função de  $t$ . Notamos que os gráficos praticamente se sobrepõem, com uma pequena variação que pode ser observada nos pontos extremos.

Figura 3.1.4 – Gráfico de  $u(\phi(t))$  (exata, em azul) e  $u_s(\phi(t))$  (calculada, em laranja) na fronteira  $\partial\Omega$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

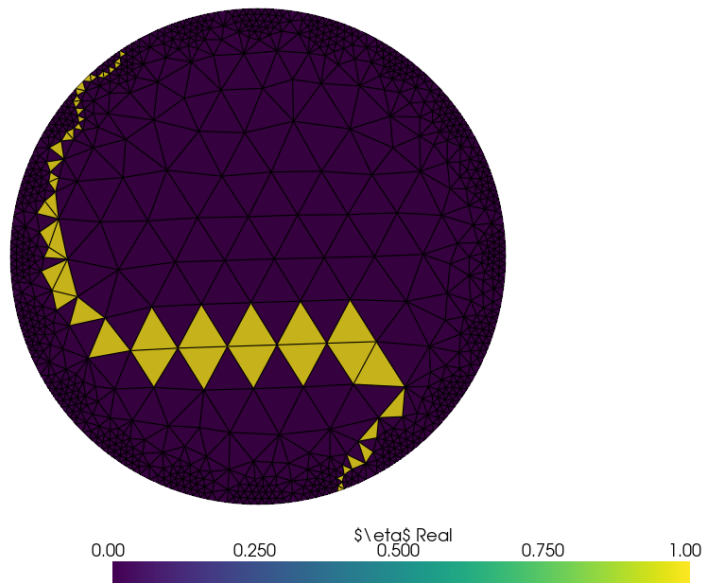
Avaliamos ainda o erro de forma numérica. Para isso, calculamos o erro quadrático na norma  $L^2$ , dado por

$$\|u - u_s\|_{L^2}^2 = \int (u - u_s) \cdot \overline{(u - u_s)} dx$$

. Tal integral é calculada através de recursos do FEniCSx, interpolando a solução exata num espaço apropriado. Comparando a solução exata e a calculada, obtemos um erro de  $\|u - u_s\|_{L^2} = 0,021236688289532443$ . Dada a amplitude da imagem da função, tanto da parte real como imaginária compreendidas entre  $[-1, 1]$ , trata-se de um erro satisfatório, mostrando a precisão do método em obter uma solução numérica.

Na sequência, realizamos experimentos para analisar o cálculo da derivada direcional do operador. Estabelecemos uma direção  $\eta$ , definida como tendo valor  $1 + i$  em um conjunto de triângulos da malha selecionados aleatoriamente, e 0 nos demais. A Figura 3.1.5 mostra um gráfico da função  $\eta$  utilizada.

Figura 3.1.5 – Função  $\eta$  estabelecida para o teste

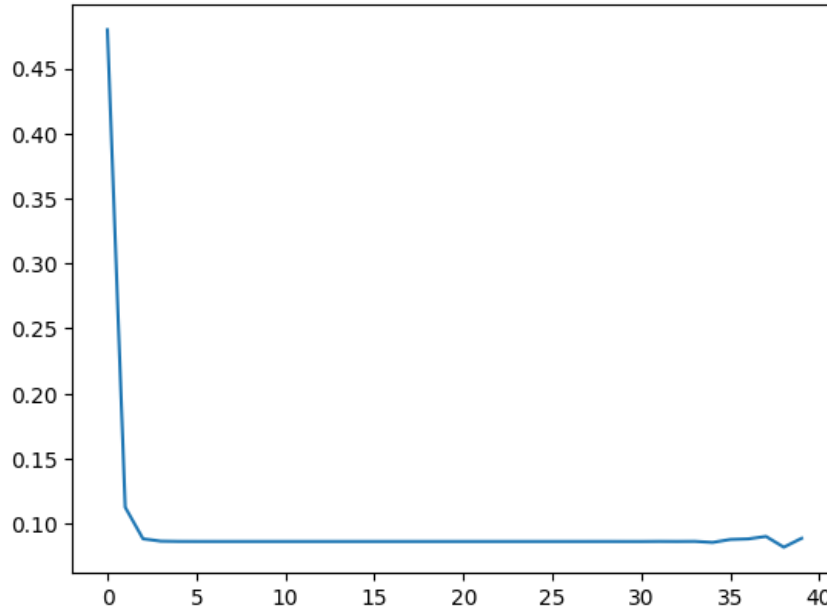


Fonte: Elaborado pelo autor.

Com a função  $\eta$  escolhida, dada a função constante  $\gamma(x, y) = 1 + i$  calculamos a derivada direcional  $\omega = F'_i(\gamma)\eta$  através do método com formulação variacional descrito anteriormente. Para avaliar o desempenho, comparamos a derivada calculada com a derivada direcional numérica, dada por

$$\frac{F'_i(\gamma + t\eta) - F'_i(\gamma - t\eta)}{2t},$$

para algum  $t \in \mathbb{R}_+^*$  próximo de 0. Esse método de cálculo numérico da derivada é conhecido por ser instável, especialmente lidando com limitações na precisão numérica do

Figura 3.1.6 – Gráfico com os 40 primeiros valores de  $e_k$ .

Fonte: Elaborado pelo autor.

computador, não sendo ideal para avaliar a precisão de outros métodos. Porém, trata-se do melhor recurso disponível para comparar o comportamento com a derivada obtida pela fórmula variacional, sendo um indicativo de que o método utilizado tem bom funcionamento caso apresente um erro estável.

O teste empregado foi dado da seguinte forma: com as  $\gamma$  e  $\eta$ , criamos uma sequência  $(t_k) \subset \mathbb{R}_+^*$  tal que  $t_k \rightarrow 0$ . Em seguida, analisamos a sequência  $(e_k)$  de erros entre a derivada numérica e absoluta relativo à norma de  $\omega$ , definida por

$$e_k = \frac{1}{\|\omega\|} \left\| \frac{F_i(\gamma + t_k\eta) - F_i(\gamma - t_k\eta)}{2t} - \omega \right\|_{L^2}$$

calculando  $F_i(\gamma + t_k\eta)$  e  $F_i(\gamma - t_k\eta)$  numericamente com o método descrito anteriormente, sendo  $F_i$  o operador respectivo à função  $g^i = g$  estabelecida previamente. A norma  $\|\cdot\|_{L^2}$  novamente é calculada utilizando recursos do FEniCSx.

A Figura 3.1.6 mostra os primeiros 40 termos da sequência de erros  $e_k$ . Observamos que há um erro próximo de 0,5 nos primeiros passos, que rapidamente decresce e estabiliza para em torno 0,1, comportamento esperado na derivada numérica. Apesar de não ser uma garantia completa, o erro estabilizando na faixa dos 10% é um indicativo que a derivada  $\omega$  calculada com o MEF é próxima da real procurada.

Por fim, fazemos uma comparação com a jacobiana  $F'_i(\gamma)$  calculada com o método descrito na Fundamentação Teórica. Tendo o vetor de coordenadas  $\hat{\eta}$  de uma direção  $\eta$  no espaço de funções discretas  $V_1$ , a matriz jacobiana nos permite calcular o vetor da derivada direcional através de uma multiplicação matriz-vetor  $F'_i(\gamma) \cdot \hat{\eta}$ .

Nosso teste consistiu em comparar a derivada direcional obtida usando a jacobiana com a obtida resolvendo o problema variacional, calculando a norma da diferença entre os vetores de coordenadas  $F'_i(\gamma) \cdot \hat{\eta}$  e  $\hat{\omega}$  respectivos. Dadas as mesmas funções  $\gamma$ ,  $g$  e  $\eta$  estabelecidas acima, obtemos o erro  $\|F'_i(\gamma)\hat{\eta} - \hat{\omega} - \hat{\omega}\| = 1.75 \cdot 10^{-5}$ . Esse erro pequeno indica que o cálculo através da jacobiana praticamente não difere do cálculo utilizando a fórmula variacional, sendo uma alternativa interessante para obter a derivada direcional.

## 3.2 Conclusões

Nessa iniciação científica, pudemos testar métodos para implementação computacional da Tomografia por Impedância Elétrica envolvendo o uso de números complexos. Realizamos um estudo dos modelos matemáticos tradicionais do problema, entendendo a natureza física e matemática. Estudamos ainda o uso do Método de Elementos Finitos para tratar o problema computacionalmente. Por fim, implementamos os métodos estudados e realizamos diferentes testes numéricos para avaliar seu desempenho.

Os experimentos mostram que o método de implementação computacional utilizado proporciona soluções satisfatórias para o cálculo do problema direto nas situações testadas. Assim, com as correntes e admitividade estabelecidas, é possível aproximar os potenciais resultantes sobre a fronteira de forma precisa. Todavia, não foi possível no tempo da IC executar os testes referentes ao problema inverso, de reconstrução de imagem da admitividade. Espera-se, em trabalhos futuros.

Espera-se que os códigos e implementações desenvolvidos possam ser utilizados no sistema final almejado pelo projeto de pesquisa que essa IC se relaciona. Além disso, espera-se em trabalhos futuros poder testar implementações com base em outros modelos explorados na TIE, como no Modelo Completo de Eletrodos, bem como explorar diferentes métodos de regularização na resolução do problema inverso.

### 3.2.1 Avaliação do aluno em relação aos benefícios da IC no seu aprendizado e formação científica.

A participação do aluno neste projeto de iniciação científica demonstrou ser uma experiência enriquecedora e fundamental para seu desenvolvimento acadêmico e científico. Durante o período de envolvimento, o aluno pôde adquirir habilidades práticas e teóricas, bem como aprofundar seu conhecimento em diferentes áreas da matemática. Além disso, a interação com o orientador e outros membros da equipe proporcionou um ambiente de aprendizado colaborativo.

Além de contribuir para a construção de uma base sólida de conhecimento científico, a experiência proporcionou o desenvolvimento de habilidades de pesquisa, resolução de problemas e comunicação científica. Em particular, propiciou a participação e publicação em anais dos seguintes eventos:

- RIFFEL, F. K. Métodos de Regularização Aplicados à Tomografia por Impedância Elétrica. Jornada de Matemática, Matemática Aplicada e Educação Matemática (J3M), 2023. Curitiba. 2023.
- RIFFEL, F. K. Métodos de Regularização Aplicados à Tomografia por Impedância Elétrica. Encontro Acadêmico da Matemática da UFSC. Florianópolis. 2023.

- RIFFEL, F. K. et al. Tomografia por Impedância Elétrica (EIT): Modelo Contínuo e Modelo Completo de Eletrodos. In: Jornada de Matemática, Matemática Aplicada e Educação Matemática, 2022, Curitiba. Caderno de Resumos - J3M, 2022. v. 6.

Em suma, tratou-se de uma experiência enriquecedora que propiciou um forte amadurecimento acadêmico e pessoal do bolsista.



# Referências

- BORCEA, L. Electrical impedance tomography. *Inverse Problems*, Institute of Physics Publishing, v. 18, n. 6, p. 99–136, 2002.
- CHENEY, M.; ISAACSON, D.; NEWELL, J. C. Electrical impedance tomography. *SIAM Review*, v. 41, n. 1, p. 85–101, 1999. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/S0036144598333613>.
- DOKKEN, J. S. *DOLFINx Tutorial*. 2024. Website. Disponível em: <https://jsdokken.com/dolfinx-tutorial/fem.html>. Acesso em: 28 de fevereiro de 2024.
- GALVIS, J.; VERSIEUX, H. *Introdução à Aproximação Numérica de Equações Diferenciais Parciais Via o Método de Elementos Finitos*. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.
- KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Nova Iorque: Wiley, 1991.
- LASSER, J. et al. Introductory data science across disciplines, using python, case studies, and industry consulting projects. *Teaching Statistics*, v. 43, n. S1, 2021. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/test.12243>. Acesso em: 24 de maio 2022.
- LOGG, A. et al. *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method*. [S.l.]: Springer, 2012. ISBN 978-3-642-23098-1.
- MARGOTTI, F. *EIT Prototype: Impedance Tomography for monitoring multiphase flows*. 2022. Disponível em: <https://fabiomargotti.paginas.ufsc.br/prototipo2/>. Acesso em: Acesso em junho de 2023.
- MARGOTTI, F. J. *On Inexact Newton Methods for Inverse Problems in Banach Spaces*. Tese (Doutorado) — Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Alemanha, 2015.
- SANTANA, L. M. *Tomografia por Impedância Elétrica: Aspectos Teóricos e Implementação Computacional*. Monografia (Bacharelado em Matemática) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2022.
- SOMERSALO, E.; CHENEY, M.; ISAACSON, D. Existence and uniqueness for electrode models for electric current computed tomography. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, v. 52, n. 4, 1992.